문제지

2015학년도 대학 신입학생 수시모집 일반전형 면접 및 구술고사

수학

제시문 1

하나의 동전을 던질 때, 앞면이나 뒷면이 나온다.

i 번째 던지기 전까지 뒷면이 나온 횟수를 a_i 라 하자($a_1 = 0$).

처음 던지기 전 가진 점수를 1점이라 하고, i 번째 던졌을 때,

동전의 뒷면이 나오면 가지고 있던 점수를 그대로 두고,

동전의 앞면이 나오면 가지고 있던 점수를 2^{a_i} 배 한다.

이러한 방식으로 N 번 동전던지기 놀이를 한다.

예를 들어 동전을 세 번 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 8이며,

이들을 "앞", "뒤" 문자로 만들어진 단어로 다음과 같이 표시할 수 있고 점수 또한 계산할 수 있다.

뒤뒤뒤 $\Rightarrow$ 1점, 뒤뒤앞 $\Rightarrow$ 4점
뒤앞뒤 $\Rightarrow$ 2점, 뒤앞앞 $\Rightarrow$ 4점
앞뒤뒤 $\Rightarrow$ 1점, 앞뒤앞 $\Rightarrow$ 2점
앞앞뒤 $\Rightarrow$ 1점, 앞앞앞 $\Rightarrow$ 1점

1-1. 동전을 N 번 던질 때 나올 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오.

1-2. 동전을 여섯 번 던질 때 점수가 5점 이하일 확률을 구하시오.

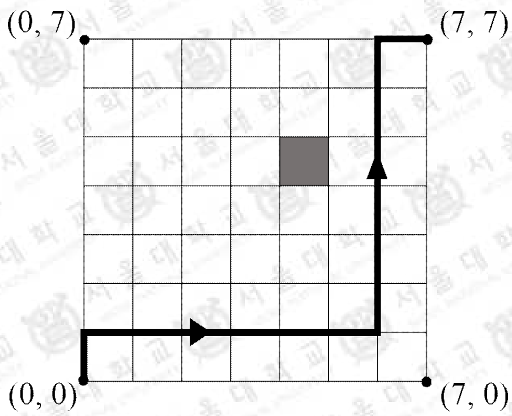
1-3. 동전을 N 번 던질 때 얻을 수 있는 점수는 모두 몇 가지인가? (단, N 은 홀수)

문제지

제시문 2

보이지 않는 영역에 대한 정보를 얻기 위하여 관측된 다른 정보를 분석하여 역으로 미 관측 영역에 대한 정보를 얻을 수 있다. 가령 주어진 영역에 장애물이 있는 경우 한 끝 점에서 출발하여 다른 끝 점에 도달하는 최단 경로의 개수를 분석하여 장애물의 위치에 대한 부분 정보를 얻을 수 있다.

예를 들어 아래 그림은 가로, 세로의 길이가 각각 7인 정사각형 모양으로 이루어진 도로망을 나타낸 것이다. 그림에서 색칠된 사각형의 네 꼭짓점 $(4, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$에는 장애물이 있어, 네 점 중 어느 점도 지날 수 없다. 그리고 그림에서 굵은 선으로 표시된 $(0, 0)$에서 $(7, 7)$로 가는 경로는 장애물이 있는 네 꼭짓점 중 어느 점도 지나지 않는 최단 경로의 한 예이다.



이제 위와 같은 상황을 일반화하여, 가로, 세로의 길이가 각각 n인 정사각형 모양의 도로망에 장애물이 놓여 있을 때, 장애물이 놓인 점을 지나지 않는 최단 경로의 개수를 조사해 보고자 한다.

2-1. 고정된 자연수 n 에 대하여, 위의 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 n 인 정사각형 모양의 도로망을 생각하자. 그리고 네 점 $\mathrm{P}(k, k+1)$, $\mathrm{Q}(k, k)$, $\mathrm{R}(k+1, k)$, $\mathrm{S}(k+1, k+1)$ 에 장애물이 놓여 있다고 하자(단, k 는 $0 \le k \le n-1$ 인 정수). 이때 $\mathrm{A}(0, 0)$ 에서 $\mathrm{B}(n, n)$ 까지 가는 최단 경로 중 P, Q, R, S 를 어느 것도 지나지 않는 경로의 개수를 구하시오.

2-2. 문제 2-1 에서 최단 경로의 개수가 최대인 경우와 최소인 경우의 k 값을 각각 구하시오.

해설지

활용 모집단위	활용 문항
사회과학대학 경제학부, 경영대학, 농업생명과학대학 농경제사회학부 생활과학대학(식품영양학과 제외) 자유전공학부	[제시문 1] 1-1, 1-2, 1-3
사회과학대학 경제학부, 자유전공학부	[제시문 2] 2-1, 2-2

출제 의도 및 근거

문제 1-1

[개념] 경우의 수의 곱의 법칙

[출처] 고등학교 수학, 지학사, 167쪽, Ⅳ 경우의 수 1-1 경우의 수의 곱의 법칙

[출제의도] 이 문제는 중학교 혹은 고등학교 교육과정에서 배우는 경우의 수에 관한 가장 기본적인 계산 능력을 묻고자 출제되었습니다. 경우의 수의 곱의 법칙을 알고 있는 학생이라면 문제를 보는 즉시 답을 알 수 있을 것입니다.

문제 1-2

[개념] 수학적 확률

[출처] 고등학교 미적분과 통계 기본, 교학사, 124쪽, Ⅳ 확률 2-1 확률의 뜻

[출제의도] 이 문제는 고등학교 교육과정에서 배우는 초보적인 확률 개념의 활용 능력을 측정하고자 출제되었습니다. 중학교부터 시작해서 고등학교 시절까지 배워온 경우의 수를 셈하는 법과, 수학적 확률의 정의를 정확히 이해한 학생이라면 누구나 제시문에 주어진 점수 계산 규칙을 바탕으로 정답을 도출할 수 있습니다.

문제 1-3

[개념] 경우의 수의 곱의 법칙

[출처] 고등학교 수학, 지학사, 167쪽, Ⅳ 경우의 수 1-1 경우의 수의 곱의 법칙

[개념] 이차함수의 최대 최소

[출처] 고등학교 수학, 지학사, 284쪽, Ⅵ 함수 2-1 이차함수의 최대, 최소

[출제의도] 본 문제에서는 경우의 수와 최대, 최소 계산 능력을 바탕으로 문제 1-1보다는 좀 더 난이도 있는 상황에서의 경우의 수를 셈하는 능력을 묻고자 합니다. 제시문에 설명된 동전 던지기 놀이의 점수를 계산하는 법을 충분히 이해하고 나면 손쉽게 문제해결 과정으로 접근할 수 있을 것입니다.

문제 2-1

[개념] 중복조합의 수
[출처] 고등학교 미적분과 통계 기본, 교학사, 116쪽, IV 확률 1-1 중복조합
[개념] 경우의 수의 곱의 법칙
[출처] 고등학교 수학, 지학사, 167쪽, IV 경우의 수 1-1 경우의 수의 곱의 법칙
[출제의도] 고등학교 교육과정에서 배우는 다양한 경우의 수 계산법을 통해 바둑판 모양의 도로에서 최단 거리를 가지는 경로의 개수를 셀 수가 있습니다. 본 문제는 고등학교 교육과정에서 배우는 기본적인 경우의 수 이론을 통해 주어진 상황을 분석하는 능력을 알아보고자 출제되었습니다. 수학 교과서 및 수학 익힘책에 수록된 다양한 문제를 해결해 본 경험이 있는 학생이라면 큰 어려움 없이 해결할 수 있습니다.

문제 2-2

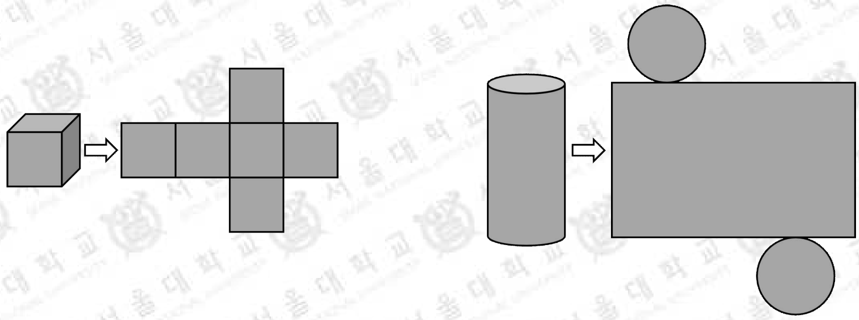
[개념] 함수의 증가와 감소
[출처] 고등학교 미적분과 통계 기본, 교학사, 57쪽, II 다항함수의 미분법, 2-1 접선의 방정식과 함수의 증가, 감소
[출제의도] 현재 모든 고등학교 학생들은 수학 기본 교과과정에서 함수의 증감을 통해 최대, 최소를 알아내는 법을 배웁니다. 경우의 수 지식을 바탕으로 문제 2-1에서 이를 통해 장애물이 어느 지점에 위치할 때 최단 경로의 수가 최소 혹은 최대가 되는지 어렵지 않게 분석해낼 수 있습니다.

2015학년도 대학 신입학생 수시모집 일반전형 면접 및 구술고사

수학

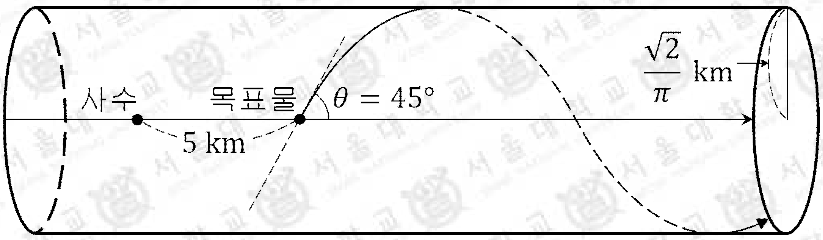
제시문 1

입체도형의 전개도는 입체도형을 한 평면 위에 펼쳐 놓은 것이다. 입체도형을 다룰 때 그 전개도를 생각하면 삼차원 공간 대신 이차원 평면 위에서 생각할 수 있으므로 편리하다. 예를 들어 정육면체의 전개도는 정사각형을 여섯 개 붙인 것이고, 높이가 유한한 원기둥의 전개도는 직사각형의 마주보는 두 변에 원을 하나씩 붙인 것이다.



1-1. 좌표평면 위를 분당 1 km의 속력으로 일정한 방향으로 달려가는 목표물을 분당 2 km의 속력으로 날아가는 탄환으로 맞히는 사격 시합이 있다고 하자. 사수가 원점에 있다고 하고 시각 $t=0$ 에서 목표물의 위치벡터를 $\vec{x} \neq \vec{0}$, 속도벡터는 $\vec{u}$ 라고 하자. 또 벡터 $\vec{x}$ 의 크기를 a 라 하고, $\vec{x}$ 와 $\vec{u}$ 사이의 각을 θ 라고 하자. 사수가 쏜 탄환이 목표물을 시각 $t=0$ 으로부터 4 분 이내에 맞힐 수 있을 조건을 a 와 θ 에 대한 식으로 나타내시오. (단, 사수, 목표물, 탄환의 크기는 무시한다. 또한 발포는 $t \geq 0$ 인 임의의 시각에 가능하다.)

1-2. 사수와 목표물이 반지름의 길이가 $\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$ km인 무한한 원기둥 표면에 있다고 하자. <u>사수가 쏘는 탄환과 목표물은 모두 원기둥의 표면을 따라서만 움직일 수 있다.</u> 시각 $t=0$ 에서 사수와 목표물은 다음 그림과 같이 중심축과 평행한 직선 위에 있고, 사수와 목표물 사이의 거리는 5 km라고 하자. 목표물은 분당 1 km의 속력으로 항상 중심축과 $\theta = 45^\circ$ 의 각도를 유지하면서 그림과 같이 움직이고 있고, 사수가 쏘는 탄환도 분당 2 km의 속력으로 항상 중심축과 일정한 각도를 유지하면서 움직인다. 이 때 사수가 쏜 탄환이 목표물을 시각 $t=0$ 으로부터 4 분 이내에 맞힐 수 있겠는가? 그 이유를 설명하시오. (단, 사수, 목표물, 탄환의 크기는 무시한다. 또한 발포는 $t \geq 0$ 인 임의의 시각에 가능하다.)



1-3. 문제 1-2에서, 목표물이 달려가는 방향과 중심축 사이의 각도 θ 에 따라서 사수가 쏜 탄환이 목표물을 4 분 이내에 맞힐 수도 있고, 그렇지 않을 수도 있다. 탄환이 목표물을 맞힐 수 있을 $\cos\theta$ 의 범위를 구하시오.

문제지

제시문 2

상품 생산, 판매 과정에서 생산자는 제조비용을 최소화하고 판매이익을 최대화하고자 한다. 그러나 유용 가능한 재료, 자본 등이 제한되어 있으므로 조건이 주어진 상황에서 비용과 이익의 최적화를 하게 된다. 이를 수학적으로 구현하는 방법 중 하나는 주어진 조건 하에서의 이익이나 비용 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제로 표현하는 것이다.

다음 문제에서는 제한 조건이 주어진 상황에서 함수의 최솟값과 최댓값을 구하고자 한다.

2-1. 조건 $xy=1$ 을 만족하는 양수 x 와 y 에 대하여 $\frac{1}{2}(ax+by)$ 의 최댓값과 최솟값이 존재하는지 밝히고, 존재하면 값을 구하시오(단, a, b 는 양수).

2-2. $t \geq 10$ 일 때, $(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=1$ 을 만족하는 실수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x+2y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 의 최댓값 $f(t)$ 를 구하시오. 이때 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 를 구하시오.

활용 모집단위	활용 문항
자연과학대학 수리과학부, 통계학과, 사범대학 수학교육과	[제시문 1] 1-1, 1-2, 1-3
공과대학, 농업생명과학대학 조경 · 지역시스템공학부	[제시문 1] 1-1, 1-2, 1-3 [제시문 2] 2-1, 2-2
농업생명과학대학 바이오시스템 · 소재학부, 자유전공학부	[제시문 2] 2-1, 2-2

출제 의도 및 근거

문제 1-1

[개념] 벡터의 크기, 내적
[출처] 고등학교 기하와 벡터, 성지출판, 149쪽, IV. 벡터 2-1 벡터의 성분
[개념] 이차함수의 최댓값과 최솟값
[출처] 고등학교 수학, 금성출판사, 230쪽, V 함수 2.1 이차함수의 활용
[출제의도] 문제에서 주어진 상황을 이해하고 벡터의 연산을 통하여 주어진 조건을 식으로 표현하는 문제입니다. “고등학교 기하와 벡터”에서 배우는 **벡터의 크기 및 내적**을 이용하면 일상적 언어로 표현된 문제의 상황을 수학적 언어로 간단하게 옮길 수 있고, “고등학교 수학”에서 배우는 **이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법**을 이용하면 답을 구할 수 있습니다.

문제 1-2

[개념] 벡터의 연산
[출처] 고등학교 기하와 벡터, 성지출판, 135쪽, IV 벡터 1-1 벡터의 뜻과 연산
[개념] 두 점 사이의 거리
[출처] 고등학교 수학, 금성출판사, 156쪽, IV 도형의 방정식 1.1 평면좌표
[출제의도] 구체적인 상황에 문제1-1의 결과를 직접 적용하는 문제입니다. “고등학교 기하와 벡터”에서 배우는 **벡터의 연산**에 대하여 이해하고 “고등학교 수학”에서 배우는 **두 점 사이의 거리를 구하는 방법**에 대하여 알면 간단하게 답을 구할 수 있습니다.

문제 1-3

[개념] 벡터의 연산
[출처] 고등학교 기하와 벡터, 성지출판, 135쪽, IV 벡터 1-1 벡터의 뜻과 연산
[개념] 삼각함수의 성질
[출처] 고등학교 수학, 금성출판사, 273쪽, VI 삼각함수 1.3 삼각함수의 성질
[개념] 삼각함수의 합성
[출처] 고등학교 수학II, 금성출판사, 52쪽, 2 삼각함수 2-1 2. 삼각함수의 합성
[출제의도] 1-2를 일반화하여 주어진 조건을 식으로 표현하는 문제입니다. 역시 1-2와 같이 “고등학교 기하와 벡터”에서 배우는 **벡터의 연산**에 대하여 이해하면 “고등학교 수학”에서 배우는 **삼각함수의 성질** 및 “고등학교 수학II”에서 배우는 **삼각함수의 합성**을 이용하면 답을 구할 수 있습니다.

문제 2-1

[개념] 함수의 극한

[출처] 고등학교 수학II, 금성출판사, 77쪽, 3 함수의 극한과 연속 1 함수의 극한

[개념] 산술평균과 기하평균의 관계

[출처] 고등학교 수학, 금성출판사, 148쪽, III 방정식과 부등식 2.2 절대부등식

[출제의도] 다항식의 최댓값과 최솟값이 존재하는지 밝히고, 존재한다면 그 값을 구하는 문제입니다. “고등학교 수학II”에서 배우는 **함수의 극한**과 “고등학교 수학”에서 배우는 **산술평균과 기하평균의 관계**를 이용하면 매우 해결할 수 있습니다.

문제 2-2

[개념] 벡터의 내적

[출처] 고등학교 기하와 벡터, 성지출판, 158쪽, IV 벡터 2-2 벡터의 내적

[개념] 구의 방정식

[출처] 고등학교 기하와 벡터, 성지출판, 118쪽, III 공간도형과 공간좌표 2-1 공간좌표

[출제의도] 제한된 조건 하에서 주어진 식의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제입니다. 주어진 식이 두 벡터의 내적임을 이해하고, “고등학교 기하와 벡터”에서 배우는 **벡터의 내적의 기하학적 의미**를 이해하면 **구의 정의**를 이용하여 간단하게 답을 계산할 수 있습니다.