문제지

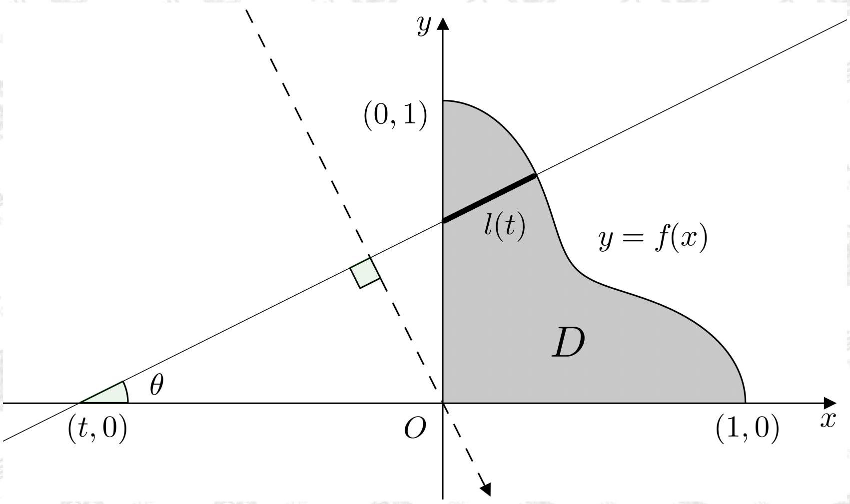
2014학년도 대학 신입학생 정시모집 일반전형

수학 · 2014년 1월 14일(화)

(※) 구간 $[0,1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 $f(0)=1$, $f(1)=0$을 만족하는 감소함수이다. 좌표평면의 부분집합 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le f(x)\}$에 대하여 문제 1, 문제 2의 물음에 답하시오.

문제 1

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 점 $(t,0)$을 지나고 기울기가 $\tan\theta$인 직선과 영역 D의 공통부분의 길이를 $l(t)$라 하고, $S(\theta)=\displaystyle\int_{-\cot\theta}^{1} l(t)dt$라 하자.



1-1. $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} S(\theta)$의 기하학적 의미를 설명하시오.

1-2. $S(\theta)$와 D의 넓이와의 관계를 구하시오.

문제 2

함수 $f(x)$와 영역 D가 1쪽에서 제시한 조건 (※)을 모두 만족하고, D를 x축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피가 y축 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피와 같다고 하자.

2-1. 위 조건을 만족하는 함수 $f(x)$의 예를 들어보시오.

2-2. 문제 2의 조건을 모두 만족하는 함수 $f(x)$가 구간 $(0,1)$에서

두 번 미분가능하다고 할 때, $\int_0^1 (f(x)-x)^2 dx$의 값을 구하시오.

2-3. 위 문항 2-2.의 조건을 모두 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여

$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 (f(x))^2 dx$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$를

모두 구하시오.

출제 근거

문제1-1

[개념] 함수의 극한의 정의 및 정적분의 뜻

[출처] ① 수학Ⅱ, ㈜미래엔컬쳐그룹, 70페이지, Ⅲ함수의 극한과 연속, 1-1함수의 극한, ② 적분과 통계, 천재교육, 34페이지, Ⅰ적분법, 2-1정적분

[출제의도] 이 문제는 주어진 극한 값이 무엇인지 추론하고, 그 추론결과의 기하학적인 의미를 물어보는 문제입니다. 직관적으로 주어진 극한 값은 함수 $f(x)$의 정적분으로 표현되고, 이 정적분 값의 기하학적인 의미를 알면 쉽게 답할 수 있습니다.

문제1-2

[개념] 삼각함수 및 정적분의 정의

[출처] ① 고등학교 수학, ㈜금성출판사, 264페이지, Ⅵ삼각함수, 1-2 삼각함수의 뜻과 그래프, ② 적분과 통계, 천재교육, 34페이지, Ⅰ적분법, 2-1정적분

[출제의도] 이 문제는 $S(\theta)$와 영역 D의 넓이와의 관계를 물어보는 문제입니다. $S(\theta)$를 기울기가 $\tan\theta$인 직선과, 이에 수직인 새로운 축에 대한 적분(치환적분법 이용)으로 바꾸고, 이를 통해 $S(\theta)$를 영역 D의 넓이와 연관 지어 생각할 수 있습니다. 학생들이 문제 접근을 쉽게 할 수 있도록, 문제의 그림에 새로운 축을 점선으로 표시해 주었습니다.

문제2-1

[개념] 대칭이동 및 회전체의 부피

[출처] ① 고등학교 수학, ㈜금성출판사, 198페이지, Ⅳ도형의 방정식, 3-4대칭이동, ② 적분과 통계, 천재교육, 60페이지, Ⅰ적분법, 3-2부피

[출제의도] 이 문제는 x축과 y축을 둘레로 회전시켜 생기는 두 회전체의 부피가 같게 되는 구체적인 예를 물어보는 문제입니다. 회전체의 부피를 구하는 식을 알고, 예시로 든 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대해 대칭이기만 하면 충분하다는 사실을 이해하면 쉽게 답할 수 있습니다.

문제2-2

[개념] 치환적분법

[출처] 적분과 통계, 천재교육, 22페이지 Ⅰ적분법, 1-2치환적분법

[출제의도] 이 문제는 주어진 조건들을 최대한 활용하여 주어진 정적분 값을 계산하는 문제입니다. 회전체의 부피와 관련된 조건과 치환적분법을 통해 $\int_0^1 (f(x))^2 dx$와 $\int_0^1 2xf(x)dx$가 같다는 사실을 얻을 수 있고, 이로부터 원하는 정적분 값을 구할 수 있습니다.

문제2-3

[개념] 정적분의 성질

[출처] 적분과 통계, ㈜중앙교육진흥연구소, 49페이지, Ⅰ적분법, 2-2정적분의 계산

[출제의도] 이 문제는 주어진 정적분 값이 최대가 되는 함수를 구하는 문제입니다. 풀이 과정은 크게 ① 문제의 답이 $f(x)=1-x$임을 추론하는 과정과, ② 왜 이 함수일 수밖에 없는지를 설명하는 과정으로 나눌 수 있습니다.

$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$라는 정적분의 성질을 이용하면

$0 \le \int_0^1 (f(x)-1+x)^2 dx$라는 부등식을 얻을 수 있고, 이로부터 원하는 결론을 얻을 수 있습니다.