문제지

2014학년도 대학 신입학생 수시모집 일반전형

수학 · 2013년 11월 22일(금)

문제 1 $y=x^2+1$의 그래프 위의 점들 중 x축 위의 점 $(a,0)$과 가장 가까운 점을 (b,b^2+1)이라고 하자.(단, $a>0$) 다음 물음에 답하여라.

1-1. a를 b의 함수로 나타내어라.

1-2. 위와 같은 a,b에 대하여, $(0,1)$에서 (b,b^2+1)까지의 그래프 위의 점들과 $(a,0)$을 선분으로 연결하여 얻은 영역을 D라 할 때, 영역 D의 넓이를 b의 함수로 나타내어라.

1-3. 영역 D의 넓이가 1이 되는 b의 개수를 구하여라.

문제 2 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$와 $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

2-1. $S_n=E+B+B^2+B^3+\cdots+B^{2n-1}$일 때, S_n의 $(1,1)$ 성분을 구하여라.
(단, n은 자연수, E는 단위행렬)

2-2. $D_n=A^n+A^{n-1}B+A^{n-2}B^2+\cdots+B^n$이라고 하자. ($n$은 자연수)
$n\to\infty$일 때 D_n의 $(1,1)$ 성분의 극한이 존재하는가?

문제지

문제 3 수지가 다음과 같은 동전 던지기 게임을 한다. 이 때 앞면이나 뒷면이 나올 확률은 같다.

(가) 하나의 게임은 동전을 한 번 던지는 것으로 이루어지며, 수지는 파란 구슬 100개, 빨간 구슬 100개와 점수 1점을 가지고 게임을 시작한다.

(나) 첫 번째부터 열 번째 게임까지는 동전을 던져 앞면이 나오는 경우에는 가지고 있는 점수가 3배가 되고 파란 구슬을 2개 받고 빨간 구슬을 1개 빼앗기며, 뒷면이 나오는 경우에는 가지고 있는 점수가 2배가 되고 파란 구슬을 1개 받고 빨간 구슬을 2개 빼앗긴다.

(다) 열한 번째부터 스무 번째 게임까지는 동전을 던져 앞면이 나오는 경우에는 가지고 있는 점수가 4배가 되고 파란 구슬을 1개 빼앗기며, 뒷면이 나오는 경우에는 점수는 그대로이고 빨간 구슬을 1개 빼앗긴다.

다음 물음에 답하여라.

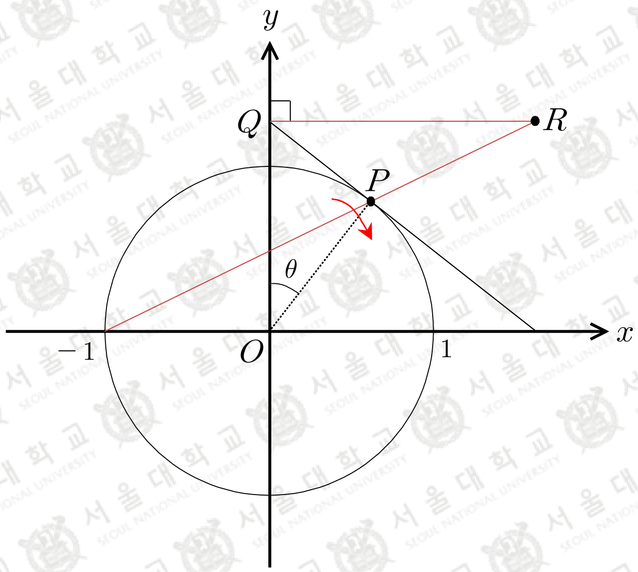
3-1. 처음 10게임 후 가지고 있는 구슬의 개수가 202개일 확률을 구하여라.

3-2. 20게임 후 나올 수 있는 각 경우의 점수를 모두 더한 값을 구하여라.

3-3. 20게임 후 파란 구슬이 a개, 빨간 구슬이 b개 나올 수 있는 (a, b)의 조건을 구하여라.

3-4. 20게임 후 파란 구슬이 110개, 빨간 구슬이 80개가 되는 경우의 점수를 모두 더한 값을 구하여라.

문제 4 아래 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있는 점 P가 점 $(0,1)$을 출발하여 원호를 따라 시계방향으로 점 $(1,0)$을 향해 움직인다. 점 P에서 원의 접선이 y축과 만나는 점을 Q라고 하자. 점 Q를 지나며 x축에 평행한 직선과 점 $(-1,0)$과 점 P를 지나는 직선이 만나는 점을 R이라고 하자. 이 때, R의 자취에 대하여 다음 물음에 답하여라.



1–1. $\angle POQ$를 θ라고 할 때, 점 $R(x,y)$의 자취를 θ에 관한 함수로 나타내어라. 즉,

$$x=g(\theta),\ y=h(\theta)\quad\left(0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

의 꼴로 나타내어라.

1–2. 점 $R(x,y)$의 자취의 방정식을 $y=f(x)$의 꼴로 나타내어라.

1–3. 문제 1–2에서 구한 함수 $y=f(x)$의 최솟값과 그 그래프의 변곡점을 구하고, 그래프의 개형을 그려라.

출제 근거

문제1-1

[개념] 두 직선의 수직 조건

[출처] 고등학교 수학, (주)고려출판, 178페이지, Ⅲ기하 2-2두 직선의 평행과 수직

[개념] 미분의 기하학적 의미

[출처] 고등학교 미적분과 통계 기본, (주)교학사, 44페이지, Ⅱ다항함수의 미분법 1-1미분계수

[출제의도] 이 문제는 (a,0)에서 포물선위에 점에 그은 선분의 길이가 최소가 될 조건을 묻는 문제입니다. 길이가 최소가 될 조건을 찾아 "고등학교 수학"에서 나오는 두 직선이 수직이 될 조건 및 "고등학교 미적분과 통계 기본"에서 배우는 미분계수의 기하학적 의미를 이용하면 쉽게 답을 구할 수 있습니다.

문제1-2

[개념] 적분을 이용한 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

[출처] 고등학교 미적분과 통계 기본, (주)교학사, 99페이지, Ⅲ다항함수의 적분법 2-1넓이

[출제의도] 이 문제는 영역의 넓이를 구하는 문제입니다. 문제에서 말하는 영역을 잘 찾는다면 "고등학교 미적분과 통계 기본"에서 배운 정적분 이용하여 넓이를 구하는 방법을 이용하여 계산할 수 있습니다.

문제1-3

[개념] 증가함수

[출처] 고등학교 미적분과 통계 기본, (주)교학사, 58페이지, Ⅱ다항함수 미분법 2-1접선의 방정식과 함수의 증가, 감소

[개념] 중간값의 정리

[출처] 고등학교 미적분과 통계 기본, (주)교학사, 32페이지, Ⅰ함수의 극한과 연속 2-2연속함수의 성질

[출제의도] 앞에서 구한 넓이가 a가 변함에 따라 b로 표현한영역의 넓이가 1을 지나는 개수를 구하는 문제입니다.

문제2-1

[개념] 행렬과 그 연산

[출처] 고등학교 수학Ⅰ, (주)금성출판사, 12페이지, Ⅰ행렬과 그래프 1행렬과 그 연산

[개념] 등비수열의 합

[출처] 고등학교 수학Ⅰ, (주)금성출판사, 125페이지, Ⅲ수열 1-3등비수열

[출제의도] 이 문제는 행렬B의 거듭제곱을 통해, 그 행렬의 특징을 파악한 후, "고등학교 수학Ⅰ"에서 배우는 행렬의 연산을 통해 식을 적절히 변형하여 등비수열의 합을 이용해 답을 도출하는 문제입니다.

문제2-2

[개념] 등비수열의 극한

[출처] 고등학교 수학Ⅰ, (주)금성출판사, 173페이지, Ⅳ수열의 극한 1-3무한등비수열의 극한

[출제의도] 이 문제는 앞에 문제2-1와 비슷하게, 행렬A와 행렬B의 특징을 파악한 후 "고등학교 수학Ⅰ"에서 배우는 행렬의 연산을 통해 식을 적절히 변형하여 일반항 D_n을 구한 후, 등비수열의 극한을 이용하여 답을 도출하는 문제입니다.

출제 근거

문제3-1

[개념] 확률
[출처] 고등학교 미적분학과 통계 기본, (주)교학사, 123페이지, Ⅳ확률 2-1확률의 뜻
[개념] 조합
[출처] 고등학교 수학, (주)고려출판, 314페이지, Ⅴ확률과 통계 1-3조합
[출제의도] 이 문제는 각 게임에서 동전에 앞면과 뒷면에 따라 받거나 잃는 구슬의 총 개수를 파악하여 총 개수가 202개가 될 확률을 구하는 문제입니다. “적분과 통계”에 명시되어있는 기본적인 확률의 정의와 “고등학교 수학”의 조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 방법을 잘 숙지하고 있다면 쉽게 해결이 가능한 문제입니다.

문제3-2

[개념] 이항정리
[출처] 고등학교 미적분학과 통계 기본, (주)교학사, 119페이지, Ⅳ확률 1-2이항정리
[출제의도] 이 문제는 모든 경우의 점수들의 총합을 구하는 문제입니다. 이 문제를 해결하기 위서는 20번 게임 후 수지의 점수를 모두 생각하고, 각각의 점수를 받을 수 있는 경우의 수를 “고등학교 수학”의 조합을 이용하여 계산할 수 있습니다. 점수들의 총합을 식으로 나타냈다면 “고등학교 미적분학과 통계 기본”에서 배우는 이항정리를 이용하여 답을 구할 수 있습니다.

문제3-3

[개념] 미지수가 2개인 연립일차방정식
[출처] 중학교 수학2, (주)금성출판사, 78페이지, Ⅲ방정식 1-2연립일차방정식
[출제의도] 이 문제는 20게임 후 수지가 가질 수 있는 빨간 구슬과 파란 구슬의 개수가 어떻게 될 것인지를 묻는 문제입니다. “중학교 수학2”에서 배우는 연립일차 방정식을 이용하여, 빨간 구슬이 a개 파란 구슬이 b개가 될 경우를 동전의 앞면(또는 뒷면)이 나타나는 횟수와 연관시킨다면 a,b의 조건을 구할 수 있습니다.

문제3-4

[개념] 주어진 정보를 종합하여, 답을 도출해내는 과정
[출제의도] 20게임 후 수지가 빨간 구슬이 110개, 파란 구슬이 80개가 될 각각의 경우에 얻을 수 있는 점수의 총합을 계산하는 문제입니다. 앞선 문제들을 풀면서 구한 식에서 a=110, b=80을 대입하면 답을 얻을 수 있습니다.

출제 근거

문제4-1

[개념] 삼각함수의 정의 및 성질
[출처] 고등학교 수학, (주)고려출판, 268페이지, Ⅳ함수 4-2삼각함수, 4-3삼각함수의 성질
[개념] 삼각형의 닮음
[출처] 중학교 수학2, (주)금성출판사, 244페이지, Ⅷ도형의 닮음 1-2삼각형의 닮음조건
[출제의도] 이 문제는 주어진 조건에 대한 자취의 방정식을 각도 θ에 대한 식으로 나타내는 문제이다. "고등학교 수학"의 삼각함수의 정의와 성질을 이용하면 점P의 좌표를 나타낼 수 있고, "중학교 수학2"의 삼각형의 닮음을 잘 이해하고 있다면 깊이 있는 관찰을 통해 답안을 도출해낼 수 있습니다.

문제4-2

[개념] 삼각함수의 정의 및 성질
[출처] 고등학교 수학, (주)고려출판, 268페이지, Ⅳ함수 4-2삼각함수, 4-3삼각함수의 성질
[출제의도] 이 문제는 "고등학교 수학"의 삼각함수의 성질을 이용하여 매개변수 θ를 이용하여 표현된 방정식을 $y=f(x)$ 꼴의 방정식으로 구하는 문제입니다. 이 경우엔 함수를 매개변수를 사용하여 나타내는 것보다 $y=f(x)$ 꼴로 나타내는 것이 그래프의 개형 등 그 성질을 이해하기 쉬우므로 다음 문제를 위한 중간 단계로서 이 문제를 출제하게 되었습니다.

문제4-3

[개념] 도함수의 활용 [출처] 고등학교 수학Ⅱ, (주)지학사, 154페이지, Ⅳ미분법 3-1그래프에의 활용
[출제의도] 이 문제는 "고등학교 수학Ⅱ"에서 학습한 미분을 이용한 그래프의 개형(극점, 변곡점)에 대한 이해가 충분하다면 약간의 계산을 통하여 해결할 수 있는 문제입니다.